☑ **قضیه: اگر عدد مثبت a تقریبی از A باشد به‌طوری که $\delta(a) \le \frac{1}{2}\times 10^{-n}$ آن‌گاه a حداقل n رقم بامعنای درست دارد.**

نکات برتر

اگر عدد مثبت a تقریبی از A با n رقم بامعنای درست و اولین رقم بامعنای آن a_m باشد، آن‌گاه $\delta(a) \le \frac{5\times 10^{-n}}{a_m}$ است. اگر عدد مثبت a گرد شده A تا n رقم بامعنا با اولین رقم بامعنای a_m باشد، آن‌گاه $\delta(a) \le \frac{5\times 10^{-n}}{a_m}$ است.

خطای محاسبه توابع:

✓ **تابع n متغیره $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ را درنظر می‌گیریم. اگر Δx_i نمو متغیر x_i باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم:**

$$\Delta w = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

در این صورت می‌توان نمو w را برحسب نمو x_i ها به صورت زیر نوشت. عبارت سمت راست این تقریب را دیفرانسیل کل تابع f می‌گوییم.

$$\Delta w \simeq \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

☑ **قضیه: اگر f تابعی n متغیره و عدد a_i تقریبی برای عدد A_i که $i = 1, 2, ..., n$ باشد، آن‌گاه:**

$$e\big(f(a_1, a_2, ..., a_n)\big) \le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, ..., a_n\right| e(a_1) + ... + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, ..., a_n\right| e(a_n)$$

$$\delta\big(f(a_1, ..., a_n)\big) \le \left|\frac{a_1}{f(a_1, ..., a_n)}\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, ..., a_n)\right| \delta(a_1) + ... + \left|\frac{a_n}{f(a_1, ..., a_n)}\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, ..., a_n)\right| \delta(a_n)$$

■ ضرایب $\delta(a_1), ..., \delta(a_n)$ در قضیه قبل را عدد حالت می‌گوییم. اگر عددهای حالت کوچک‌تر از ۱ باشند، مسأله، خوش حالت و در غیر این صورت بد حالت است.

نکات برتر

اگر f تابعی یک متغیره و a تقریبی برای A باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{e\big(f(a)\big) \le |f'(a)|\, e(a)} \quad \text{و} \quad \boxed{\delta\big(f(a)\big) \le \left|\frac{af'(a)}{f(a)}\right| \delta(a_1)}$$

خطای محاسبه سری‌ها:

■ **اگر تابع f در مجاورت نقطه a دارای مشتقات پیوسته تا مرتبه $n+1$ باشد، آن‌گاه:**

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta)$$

که در آن η بین x و a قرار دارد. فرمول بالا را بسط تیلور مختوم تابع f در مجاورت a می‌گوییم. در صورتی که $a=0$ باشد، بسط مک‌لورن تابع f به‌دست می‌آید جمله $R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)}f^{(n+1)}(\eta)$ جمله باقیمانده با خطای بسط تیلور نامیده می‌شود.

■ در این قسمت بسط مک‌لورن چند تابع پرکاربرد را می‌آوریم.

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots$	$\sinh x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$
$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots$	$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$
$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\dots$	$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$
$\text{Arctan}\, x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots$	

مرتبه هم‌گرایی توابع:

✓ **اوی بزرگ**؛ اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{g(h)}=c\neq 0$ باشد، می‌نویسیم $f(h)=O\big(g(h)\big)$. در این صورت می‌گوییم $f(h)$ با $g(h)$ متناسب است. ✓ **اوی کوچک**؛ اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{g(h)}=0$ باشد، می‌نویسیم $f(h)=o\big(g(h)\big)$. بنابراین در نزدیکی صفر $f(h)$ سریع‌تر از $g(n)$ به صفر میل می‌کند.

نکته‌برتر: اگر $f(h)=O(h^p)$ باشد. هرچه p بزرگ‌تر باشد $f(h)$ سریع‌تر به صفر میل می‌کند و اگر $f(h)=o(h^p)$ باشد، $f(h)$ سریع‌تر از h^p به صفر میل می‌کند.

پایداری روش‌های عددی:

■ یک روش عددی را پایدار می‌گوییم، هرگاه تغییرات کوچک در داده‌های ورودی، موجب تغییرات کوچکی در نتیجه نهایی شود یک روش عددی را ناپایدار می‌گوییم، هرگاه تغییرات کوچک در داده‌های ورودی، موجب تغییرات بزرگی در نتیجه نهایی شود.

نکته‌برتر: برای پایداری محاسبه جملات یک رابطه بازگشتی خطی، باید قدر مطلق ضرایب کوچک‌تر از یک باشند.

حل عددی معادله غیرخطی

■ ریشه یک تابع، عددی است که موجب صفر شدن آن می‌شود. اگر α ریشه‌ای برای تابع $f(x)$ باشد، آن‌گاه عدد طبیعی m و تابع $g(x)$ را می‌توان یافت به‌طوری که،

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x) \quad ; \quad g(\alpha)\neq 0$$

■ عدد طبیعی m، مرتبه تکرار (یا چندگانگی) ریشه α نامیده می‌شود. در حالتی که m برابر یک است ریشه α را ساده می‌گویند. گاهی یافتن تابع $g(x)$ دشوار است؛ بنابراین برای مشخص کردن مرتبه تکرار یک ریشه از قضیه زیر استفاده می‌کنیم که مبتنی بر مشتق تابع f می‌باشد.

☑ **قضیه: عدد α ریشه با مرتبه تکرار m برای معادله $f(x)=0$ است اگر و فقط اگر:**

$$\boxed{f(\alpha)=f'(\alpha)=\ldots=f^{(m-1)}(\alpha)=0 \quad , \quad f^{(m)}(\alpha)\neq 0}$$

به عبارت دیگر، کوچک‌ترین مرتبه مشتقی از تابع f که α آن را صفر نمی‌کند، برابر مرتبه تکرار ریشه α است.

تعیین تعداد و حدود ریشه‌ها:

■ اغلب برای تعیین ریشه‌ای از یک معادله، با دقت مطلوب، نیاز است که تقریبی از آن ریشه یا بازه کوچکی که شامل آن باشد را بیابیم. روش‌های زیر را برا تعیین تعداد و حدود ریشه‌های معادله $f(x)=0$ بررسی می‌کنیم.

☑ **روش‌ترسیمی: در این روش با توجه به ضابطه تابع f می‌توان دو حالت زیر را درنظر گرفت:**

✓ منحنی $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس محل تلاقی این منحنی را با محور x می‌یابیم. طول نقاط تلاقی ریشه‌های معادله $f(x)=0$ هستند.

✓ تابع $f(x)$ را به صورت تفاضل دو تابع، یعنی $f(x)=f_{1(x)}(x)-f_2$ می‌نویسیم که رسم هر یک از آن‌ها پیچیدگی کمتری نسبت به $f(x)$ دارد. سپس منحنی‌های $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ را رسم می‌کنیم. محل تلاقی این دو منحنی را می‌یابیم. طول نقاط تلاقی، ریشه‌های معادله $f(x)=0$ هستند.

☑ **روش تحلیلی:** برای استفاده از روش تحلیلی، به یادآوری چند قضیه از حسابان نیاز داریم. برخی از این قضایا برای تعیین حدود ریشه‌ها و بعضی برای یافتن تعداد ریشه‌ها مناسب هستند. به‌عنوان مثال، قضیه علامت دکارت فقط برای تعیین تعداد ریشه‌های مثبت یا منفی معادله‌ای چندجمله‌ای در شرایطی خاص استفاده می‌شود.

☑ **قضیه (بولتزانو- وایرشتراس):** اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته و دو مقدار $f(a)$ و $f(b)$ دارای علامت‌های مختلف باشند یعنی؛ $f(a)f(b)<0$، آن‌گاه تابع f بر بازه (a,b)، حداقل یک ریشه دارد. علاوه بر این، اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ یک‌نوای اکید (یعنی صعودی یا نزولی اکید) باشد، این ریشه یکتا خواهد بود.

نکات برتر

توجه کنید که در صورت برقراری شرایط قضیه بولتزانو- وایرشتراس بر بازه (a,b)، برای یکتا بودن ریشه، کافی است که $f'(x)$ بر $[a,b]$ موجود و بر (a,b) مخالف صفر باشد. همچنین اگر در شرایط قضیه بولتزانو- وایرشتراس $f(a)f(b)'>0$ باشد، آن‌گاه تابع f بر (a,b) یا ریشه ندارد و یا ریشه تکراری با چندگانگی زوج دارد.

☑ **قضیه (رُل): اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته و بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد، به‌طوری که $f(a)=f(b)$ باشد، آن‌گاه عددی مانند c متعلق به (a,b) وجود دارد که $f'(c)=0$ است.**

☑ **قضیه (نتیجه قضیه رُل): با شرایط قضیه رل، اگر تابع $f'(x)$ بر بازه (a,b) دارای n ریشه باشد، آن‌گاه تابع $f(x)$ بر این بازه دارای $n+1$ ریشه است.**

☑ **قضیه:** اگر عدد مختلط α **ریشه معادله $P(x)=0$ باشد، آن‌گاه مزدوج آن، $\bar{\alpha}$ نیز چنین است. بنابراین اگر درجه چندجمله‌ای $P(x)$ فرد باشد، حداقل یک ریشه حقیقی دارد.**

☑ **قضیه (قاعده علامت‌های دکارت): حداکثر تعداد ریشه‌های مثبت چندجمله‌ای $P(x)$ برابر تعداد تغییر علامت‌های ضرایب آن است و اختلاف آن‌ها (تعداد ریشه‌ها و تعداد تغییر علامت‌های**

ضرایب) عددی زوج است. حداکثر تعداد ریشه‌های منفی چندجمله‌ای $P(x)$ برابر تعداد تغییر علامت‌های ضرایب چندجمله‌ای $P(-x)$ است و اختلاف آن‌ها (تعداد ریشه‌ها و تعداد تغییر علامت‌های ضرایب) عددی زوج است.

حل عددی معادله غیرخطی:

■ در روش‌های عددی برای حل معادله $f(x)=0$، ابتدا بازه $[a,b]$ را طوری می‌یابیم که شرایط قضیه بولتزانو- وایرشتراس برای آن برقرار شود. (یعنی ریشه‌ای یکتا از معادله در آن باشد.) در این صورت بازه (a,b) را برای تابع f غیربدیهی می‌گوییم. سپس دنباله $\{x_n\}$ را که دنباله حاصل از روش عددی نامیده می‌شود. طوری می‌سازیم که به ریشه مورد نظر معادله هم‌گرا شود. در الگوریتم روش‌های عددی محاسبه جمله‌های دنباله $\{x_n\}$ تا زمانی انجام می‌شود که شرطی خاص موسوم به شرط توقف برقرار شود. برای مثال هر یک از موارد زیر را می‌توان به‌عنوان شرط توقف درنظر گرفت که در آن‌ها ε عددی مثبت و مفروض است.

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}\right| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |f(x_n)| < \varepsilon$$

مرتبه هم‌گرایی دنباله:

■ اگر دنباله $\{x_n\}$ به عدد α هم‌گرا باشد، می‌گوییم مرتبه هم‌گرایی آن برابر p است. هرگاه عدد مثبت c موجود باشد به‌طوری که $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}\right| = c$ در این صورت عدد c را مجانب خطی یا ثابت هم‌گرایی دنباله می‌گوییم.

نکات برتر

هرچه مرتبه هم‌گرایی دنباله بزرگ‌تر باشد، هم‌گرایی آن سریع‌تر است. همچنین اگر دنباله $\{x_n\}$ به عدد α هم‌گرا بوده و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^q}\right| = 0$ باشد در این صورت مرتبه هم‌گرایی دنباله از q بیشتر خواهد بود.

روش دوبخشی (تنصیف):

■ **هرگاه α، تنها ریشه معادله $f(x)=0$ بر فاصله (a,b) باشد، در روش دوبخشی، نقطه وسط بازه یعنی $c=\frac{a+b}{2}$ را به‌عنوان اولین تقریب برای ریشه α درنظر می‌گیریم، برای مقدار c، سه امکان وجود دارد:**

✓ اگر $f(c)=0$ باشد، در این صورت ریشه برابر c است.

✓ اگر علامت‌های مقادیر $f(x)$ و $f(c)$ متفاوت باشند، آن‌گاه ریشه معادله در فاصله (a,c) قرار دارد.

✓ اگر علامت‌های مقادیر $f(b)$ و $f(c)$ متفاوت باشند، آن‌گاه ریشه معادله در فاصله (c,b) قرار دارد. به این ترتیب، با ادامه این روش، ریشه معادله را در بازه‌هایی جست‌وجو می‌کنیم که طول آن‌ها در هر محله نصف می‌شوند.

■ **درواقع در روش دوبخشی، دنباله بازه‌های (a_n,b_n) به صورت زیر پدید می‌آیند:**

$$(a_1,b_1) := (a,b) \ , \ (a_{n+1},b_{n+1}) := \begin{cases}(a_n,x_n) & ; \ f(x_n)f(a_n)<0 \\ (x_n,b_n) & ; \ f(x_n)f(b_n)<0\end{cases} \quad ; \quad x_n := \frac{1}{2}(a_n+b_n)$$